-1

ESERCIZI SUI MASSIMI E MINIMI

ESERCIZIO Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^3 + 4x^2 - 3y^2,$$ si chiede di

a) calcolare le derivate parziali prime e seconde;

b) determinare gli eventuali punti stazionari (o critici);

c) stabilire se questi punti stazionari sono di massimo relativo o di minimo relativo o di sella.

a) Si ha: $f_x(x,y) = 4x^3 + 8x = 4x \cdot (x^2+2)$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 3y \cdot (y-2)$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 8$ $\quad f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y)$ $\quad f_{yy}(x,y) = 6y - 6$

b) I punti stazionari (o critici) sono (tutti e soli) quei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali si ha contemporaneamente $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$,

cioè $\begin{cases} 4x \cdot (x^2+2) = 0 \\ 3y \cdot (y-2) = 0 \end{cases}$, ossia i punti

$P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$.

c) Sia $H(x,y)$ il determinante della matrice Hessiana nel punto (x,y). Si ha

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 12x^2+8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix} =$$

$= (12x^2+8) \cdot (6y-6)$. Quindi $H(0,0) = 8 \cdot (-6) = -48 < 0$ e pertanto, in virtù del test dell'Hessiano, $(0,0)$ è un punto sella. Inoltre, $H(0,2) = 8 \cdot (12-6) = 8 \cdot 6 = 48 > 0$, e $f_{xx}(0,2) = 8$, $f_{yy}(0,2) = 6$. Quindi, per il test dell'Hessiano, $(0,2)$ è un punto di minimo relativo. Alle stesse conclusioni si perviene se studiamo il segno degli autovalori della matrice Hessiana $H^*(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix}$ nei punti stazionari. Nel punto $(0,0)$ si ha $H^*(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori di $H^*(0,0)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(0,0) - \lambda I) =$
$= \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & -6-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)(-6-\lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -6$, di segno diverso, e quindi $(0,0)$ è un punto sella.

Nel punto $(0,2)$ si ha $H^*(0,2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Gli autovalori λ di $H^*(0,2)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(0,2) - \lambda I) =$
$= \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)\cdot(6-\lambda)$. Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$, entrambi positivi, e quindi $(0,2)$ è un punto di minimo relativo.

ESERCIZIO - Data la funzione

$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$, $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

si chiede di

a) calcolare le derivate parziali prime e seconde;

b) determinare gli eventuali punti stazionari (o critici);

c) stabilire se questi punti stazionari sono di massimo relativo o di minimo relativo o di sella.

a) Si ha: $f_x(x,y) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) =$
$= 4x \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2})$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 3y(y-2)$

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 8 \quad f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y) \quad f_{yy}(x,y) = 6y-6$

b) I punti stazionari (o critici) sono quei punti (x,y) per i quali si ha $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} 4x \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2}) = 0 \\ 3y \cdot (y-2) = 0 \end{cases}$

Si ottengono dunque i punti $(0,0)$, $(0,2)$, $(\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},2)$

c) Sia $H(x,y)$ il determinante della matrice Hessiana nel generico punto (x,y). Si ha:

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix} =$$

$= (12x^2-8) \cdot (6y-6)$. Quindi $H(0,0) = (-8)\cdot(-6) = 48$, $f_{xx}(0,0) = -8$, $f_{yy}(0,0) = -6$. Pertanto, per il test dell'Hessiano, $(0,0)$ è un punto di massimo relativo. Si ha inoltre $H(0,2) = (-8)\cdot(6\cdot 2-6) = (-8)\cdot 6 = -48 < 0$. L'Hessiano è negativo in $(0,2)$, e quindi $(0,2)$ è un punto sella. Inoltre, è $H(\sqrt{2},0) =$ $= H(-\sqrt{2},0) = (24-8)\cdot(-6) = 16\cdot(-6) = -96 < 0$, quindi anche i punti $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ sono punti sella. Infine, è: $H(\sqrt{2},2) = H(-\sqrt{2},2) = (24-8)\cdot(12-6) =$ $= 16\cdot 6 = 96$; $f_{xx}(\sqrt{2},2) = f_{xx}(-\sqrt{2},2) = 24-8 = 16$; $f_{yy}(\sqrt{2},2) = f_{yy}(-\sqrt{2},2) = 12-6 = 6$. Per il test dell' Hessiano, i punti $(\sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, 2)$ sono punti di minimo relativo.

Alle stesse conclusioni si perviene se studiamo il segno degli autovalori della matrice Hessiana $H^*(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{bmatrix}$ nei punti stazionari. Nel punto $(0,0)$ si ha:

$H^*(0,0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. Gli autovalori λ di $H^*(0,0)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(0,0) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 0 \\ 0 & -6-\lambda \end{bmatrix} = (-8-\lambda)\cdot(-6-\lambda) = (\lambda+8)\cdot(\lambda+6)$.

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -6$, entrambi negativi, e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo relativo.

Nel punto $(0,2)$ si ha:

$H^*(0,2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Gli autovalori λ di $H^*(0,2)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(0,2) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (-8-\lambda)\cdot(6-\lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 6$, e pertanto il punto $(0,2)$ è un punto sella.

Nei punti $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ si ha: $H^*(\sqrt{2},0) = H^*(-\sqrt{2},0) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. Quindi gli autovalori λ di $H^*(\sqrt{2},0) = H^*(-\sqrt{2},0)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(\sqrt{2},0) - \lambda I) = \det(H^*(-\sqrt{2},0) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 16-\lambda & 0 \\ 0 & -6-\lambda \end{bmatrix} = (16-\lambda)\cdot(-6-\lambda)$. Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = -6$, e quindi i punti $(\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},0)$ sono punti sella. Infine, nei punti $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 2)$ si ha: $H^*(\sqrt{2},2) = H^*(-\sqrt{2},2) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Gli autovalori λ di $H^*(\sqrt{2},2) = H^*(-\sqrt{2},2)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H^*(\sqrt{2},2) - \lambda I) = \det(H^*(-\sqrt{2},2) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 16-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (16-\lambda)(6-\lambda)$. Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 6$, e quindi i punti $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 2)$ sono punti di minimo relativo.

Esercizio su Hessiano e massimi e minimi

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2)+23$$, si chiede di:

a) Calcolare le derivate parziali prime e seconde;

b) determinare i punti stazionari;

c) determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e gli eventuali punti sella, con il test dell'Hessiano.

Si ha: $f_x(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2)+e^{x+y}\cdot(-4x) =$ $= e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x)$ (applicando la formula di derivazione della funzione prodotto e considerando la y come se fosse una costante). Similmente, si ha: $f_y(x,y) = e^{x+y}(-2x^2-4y^2)+$ $+e^{x+y}\cdot(-8y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-8y)$;

$$f_{xx}(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x)+e^{x+y}\cdot(-4x-4) = \\ = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-8x-4)$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x)+e^{x+y}\cdot(-8y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x-8y)$$

$$f_{yx}(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-8y)+e^{x+y}\cdot(-4x) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x-8y)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-8y)+e^{x+y}\cdot(8y-8) = \\ = e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-16y-8).$$

Imponiamo ora la condizione di annullamento del gradiente. Si deve avere $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-4x)=0 \\ e^{x+y}\cdot(-2x^2-4y^2-8y)=0 \end{cases}$ Da ciò, poiché e^{x+y} è sempre strettamente positivo, si ottiene

$\begin{cases} x^2+2y^2+2x=0 \\ x^2+2y^2+4y=0 \end{cases}$ Sottraendo membro a membro queste due equazioni, si ha $2x-4y=0$, cioè $2x=4y$, $\boxed{x=2y}$. Sostituendo l'espressione $x=2y$ in questa equazione, si ottiene $4y^2+2y^2+4y=0$, $6y^2+4y=0$, $3y^2+2y=0$, $y\cdot(3y+2)=0$, da cui $y=0$ oppure $y=-\frac{2}{3}$. Da $\boxed{x=2y}$, si deduce che al ~~valore~~ $y=0$ corrisponde $x=2y=0$, mentre ad $y=-\frac{2}{3}$ corrisponde $x=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$. Quindi i punti stazionari sono $P_1=(0,0)$, $P_2=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

PROVA (trucco): Vediamo se i valori di x e y, nel caso $x=-\frac{4}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, verificano la (seconda) equazione $x^2+2y^2+4y=0$. Si ha:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}+2\cdot\frac{4}{9}-\frac{8}{3}=\frac{16+8-24}{9}=0, \text{ OK!}$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana nel punto $P_1=(0,0)$. Si ha

$$H(P_1)=H(0,0)=\det\begin{pmatrix} e^0\cdot(-4) & 0 \\ 0 & e^0\cdot(-8)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=32>0.$$

Poiché $H(0,0)>0$ ed $f_{xx}(0,0)=-4<0$ (ed $f_{yy}(0,0)=-8<0$), allora, per il test dell'Hessiano, il punto P_1 è un punto di massimo relativo. Alla stessa conclusione si giunge se si considerano gli autovalori della matrice Hessiana $H(P_1)$. Questi autovalori sono le soluzioni λ dell'equazione $\det(H(P_1)-\lambda I)=0$. Si ha:

$$0=\det(H(P_1)-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-4-\lambda & 0\\ 0 & -8-\lambda\end{pmatrix}=(-4-\lambda)\cdot(-8-\lambda),$$

da cui $\lambda=-4$, $\lambda=-8$. I due autovalori sono negativi, e quindi siamo in presenza di un punto di massimo relativo.

Calcoliamo ora la matrice Hessiana nel punto $P_2=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Si ha: $$H(P_2)=H\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)=\det\begin{pmatrix} e^{-2}\cdot\left(-2\cdot\frac{16}{9}-4\cdot\frac{4}{9}-8\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-4\right) & e^{-2}\cdot\left(-2\cdot\frac{16}{9}-4\cdot\frac{4}{9}+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right) \\ e^{-2}\cdot\left(-2\cdot\frac{16}{9}-4\cdot\frac{4}{9}+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right) & e^{-2}\cdot\left(-2\cdot\frac{16}{9}-4\cdot\frac{4}{9}+16\cdot\frac{2}{3}-8\right)\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} e^{-2}\left(\frac{-32-16+96-36}{9}\right) & e^{-2}\cdot\left(\frac{96-32-16}{9}\right) \\ e^{-2}\cdot\left(\frac{96-32-16}{9}\right) & e^{-2}\left(\frac{-32+96-72-16}{9}\right)\end{pmatrix}=e^{-4}\det\begin{pmatrix}\frac{12}{9} & \frac{48}{9}\\ \frac{48}{9} & -\frac{24}{9}\end{pmatrix}=e^{-4}\det\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{16}{3}\\ \frac{16}{3} & -\frac{8}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{e^{-4}}{9}\det\begin{pmatrix}4 & 16\\ 16 & -8\end{pmatrix}=\frac{e^{-4}}{9}(-288)=-32\cdot e^{-4}<0.$$ Quindi P_2 è un punto sella.

Alla stessa conclusione si perviene se facciamo il test dell'Hessiano con gli autovalori. Gli autovalori di $H(P_2)$ sono le soluzioni λ dell'equazione $\det(H(P_2)-\lambda I)=0$, cioè, procedendo come alla fine della pagina precedente,

$$0=\det\begin{pmatrix} e^{-2}\cdot\frac{\cancel{12}\,4}{\cancel{9}\,3}-\lambda & e^{-2}\cdot\frac{\cancel{48}\,16}{\cancel{9}\,3} \\ e^{-2}\cdot\frac{\cancel{48}\,16}{\cancel{9}\,3} & -e^{-2}\cdot\frac{\cancel{24}\,8}{\cancel{9}\,3}-\lambda \end{pmatrix}=\left(e^{-2}\cdot\frac{4}{3}-\lambda\right)\cdot\left(-e^{-2}\cdot\frac{8}{3}-\lambda\right)-$$

$$-e^{-4}\cdot\frac{256}{9}=\lambda^2+e^{-2}\cdot\frac{8}{3}\lambda-e^{-4}\frac{32}{9}-e^{-4}\cdot\frac{256}{9}$$

, equazione di secondo grado del tipo $\lambda^2+b\lambda-c$, con $b>0$, $c>0$. Quindi questa equazione ammette una permanenza (cioè un mantenimento del segno dei coefficienti) ($\lambda^2+b\lambda$, da 1 a b) e una variazione (cioè un cambiamento del segno dei coefficienti) ($b\lambda-c$, da b a $-c$). Sappiamo, dalla teoria delle equazioni di secondo grado, che a una variazione corrisponde una radice positiva dell'equazione (cioè, nel nostro caso, un autovalore positivo), mentre a una permanenza corrisponde una radice negativa dell'equazione (cioè, nel nostro caso, un autovalore negativo). Pertanto, abbiamo un autovalore positivo e un autovalore negativo, e quindi il test dell'Hessiano con gli autovalori ci dice che il punto P_2 è un punto sella.

ESERCIZIO: Data la funzione

$$g(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2 + 2y^2 + 12, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si chiede di:

a) calcolare le derivate parziali prime e seconde di g;

b) determinare i punti stazionari di g;

c) calcolare gli autovalori della matrice Hessiana, nei punti stazionari;

d) determinare, con il test dell'hessiano, gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e di sella.

a) Si ha: $g_x(x,y) = 4x^3 + 12x$; $g_y(x,y) = 4y^3 + 4y$;
$g_{xx}(x,y) = 12x^2 + 12$; $g_{xy}(x,y) = 0 = g_{yx}(x,y)$; $g_{yy}(x,y) = 12y^2 + 4$

b) Imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente $\nabla g(x,y) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases}$. Si ha: $\begin{cases} 4x^3 + 12x = 0 \\ 4y^3 + 4y = 0 \end{cases}$, cioè

$$\begin{cases} 4x(x^2+3) = 0 \\ 4y(y^2+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$ (perché x^2+3 ed y^2+1 sono quantità SEMPRE positive)

e quindi $x = 0$, $y = 0$. L'unico punto stazionario è $P = (0,0)$.

c) Consideriamo la matrice Hessiana. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+12 & 0 \\ 0 & 12y^2+4 \end{bmatrix},$$ e quindi, nel punto $P = (0,0)$, si ha

$$H(P) = H(0,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$ Gli autovalori della matrice $H(P)$ sono le soluzioni λ dell'equazione $\det(H(P) - \lambda I) = 0$, cioè

$$0 = \det \begin{bmatrix} 12-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (12-\lambda)\cdot(4-\lambda).$$ Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 4$.

 $\boxed{\text{NEW}}$ – eserc. ispir.

d) Essendo gli autovalori della matrice Hessiana calcolata in $(0,0)$ entrambi positivi, allora il punto $(0,0)$ è un punto di minimo relativo (per il test dell'Hessiano con gli autovalori).
Alla stessa conclusione si perviene osservando che $H(0,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(H(0,0)) = 48 > 0$ e inoltre $g_{xx}(0,0) = 12 > 0$ (oppure, equivalentemente: e inoltre $g_{yy}(0,0) = 4 > 0$), in virtù del test dell'Hessiano <u>senza</u> autovalori nel caso di funzioni a due variabili.

ESERCIZIO - 10 - NEW - Eserc. ispir.

Data la funzione

$$g(x,y) = \frac{7}{3}x^3 + y^2 - 8xy + 9x^2 + 16x - 4y - 23, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

si chiede di:

a) calcolare le derivate parziali prime e seconde di g;

b) determinare i punti stazionari di g;

c) determinare gli (eventuali) punti di massimo e di minimo relativi e di sella.

a) Si ha: $g_x(x,y) = \frac{7}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 8y + 18x + 16$;

$g_y(x,y) = 2y - 8x - 4$;

$g_{xx}(x,y) = 14x + 18$; $g_{yy}(x,y) = 2$; $g_{xy}(x,y) = -8 = g_{yx}(x,y)$.

b) Imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente $\nabla g(x,y) = (0,0)$, cioè

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x^2 - 8y + 18x + 16 = 0 \\ 2y - 8x - 4 = 0 \end{cases}$$

Da $2y - 8x - 4 = 0$ si ottiene $y = 4x + 2$, e sostituendo qui l'espressione di y in funzione di x, abbiamo

$$7x^2 - 8(4x+2) + 18x + 16 = 0 \qquad 7x^2 - 32x \cancel{-16} + 18x \cancel{+16} = 0$$

$$7x^2 - 14x = 0 \qquad x^2 - 2x = 0 \qquad x(x-2) = 0$$

Quindi si trova $x = 0$ oppure $x = 2$: nel primo caso $y = 2$, mentre nel secondo caso $y = 4 \cdot 2 + 2 = 10$, Pertanto i punti stazionari sono $P_1 = (0,2)$ e $P_2 = (2,10)$.

c) Consideriamo la matrice Hessiana. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 14x + 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi nel punto $P_1 = (0,2)$ si ha

$$H(P_1) = H(0,2) = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix},$$

e pertanto $\det(H(P_1)) = 36 - 64 = -28 < 0$. Dunque, P_1 è un punto sella. Nel punto $P_2 = (2,10)$ si ha

$$H(P_2) = H(2,10) = \begin{bmatrix} 46 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix},$$

e quindi $\det(H(P_2)) = 92 - 64 = 28 > 0$, mentre $g_{xx}(2,10) = 46 > 0$ (ed $g_{yy}(2,10) = 2 > 0$). Per il test dell'Hessiano, P_2 è un punto di minimo relativo.

Alla stessa conclusione si perviene se consideriamo gli autovalori della matrice Hessiana.

$H(P_1) = H(0,2) = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di $H(P_1)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H(P_1) - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 18-\lambda & -8 \\ -8 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$

$= (18-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 20\lambda + 36 - 64 = \lambda^2 - 20\lambda - 28$

Il trinomio $\lambda^2 - 20\lambda - 28$ ammette una variazione e una permanenza (del segno dei coefficienti). La variazione si ha quando si passa dal coefficiente 1 al coefficiente -20, mentre la permanenza c'è quando si passa dal coefficiente -20 al coefficiente -28. Alla variazione (o cambiamento di segno) corrisponde una radice positiva dell'equazione considerata (cioè, nel nostro caso, un autovalore positivo), mentre alla permanenza (o mantenimento del segno) corrisponde una radice negativa dell'equazione considerata (cioè, nel nostro caso, un autovalore negativo). Quindi, abbiamo un autovalore positivo e un autovalore negativo, e pertanto si riottiene che P_1 è un punto sella.

Si ha inoltre: $H(P_2) = H(2,10) = \begin{bmatrix} 46 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di $H(P_2)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H(P_2) - \lambda I) =$

$= \det\begin{bmatrix} 46-\lambda & -8 \\ -8 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (46-\lambda)(2-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 48\lambda + 92 - 64 =$

$= \lambda^2 - 48\lambda + 28$. Procedendo come al passo precedente, notiamo che questo trinomio ammette due variazioni, e quindi due radici <u>reali</u> positive (le radici devono essere necessariamente reali, in quanto $H(P_2)$ è simmetrica). Da ciò, per il test dell'Hessiano con gli autovalori, si deduce che P_2 è un punto di minimo relativo, essendo gli autovalori di $H(P_2)$ TUTTI E DUE POSITIVI.

ESERCIZIO

Sia $f(x,y)=0$ l' equazione della circonferenza di centro $(-1,2)$ e raggio 3. Calcolare le derivate parziali prime e seconde di f, determinare i punti stazionari di f e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e di sella, con il test dell' Hessiano.

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti (x,y) aventi la stessa distanza ($= r =$ raggio) da un punto fisso (x_0, y_0) detto centro. Questo si esprime come

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{distanza di } (x,y) \text{ da } (x_0,y_0)} = r \text{, cioè } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2.$$

Nel nostro caso, l' equazione della circonferenza data è $(x+1)^2+(y-2)^2=9$, cioè ($x_0=-1$, $y_0=2$, $r=3$) $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2-9=0}$. Quindi, si ha: $f(x,y)= (x+1)^2+(y-2)^2-9$, o anche $f(x,y)=x^2+2x+1+y^2-4y+4-9=x^2+y^2+2x-4y-4$.

Calcoliamo ora le derivate parziali

$f_x(x,y)=2(x+1)=2x+2$, $f_y(x,y)=2(y-2)=2y-4$, $f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=0=f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)=2$. Per trovare i punti stazionari di f, imponiamo la condizione di annullamento del gradiente

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=-2 \\ 2y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

L' unico punto stazionario è il punto $P=(-1,2)$.

La matrice Hessiana $H(x,y)$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$, quindi anche

$$H(P) = H(-1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$. Si ha: $\det H(P) > 0$, ed inoltre $f_{xx}(P) > 0$ (ed $f_{yy}(P) > 0$), e quindi, in virtù del test dell' Hessiano, P è un punto di minimo relativo (che in realtà è anche di minimo assoluto).

Alla stessa conclusione arriviamo se si considerano gli autovalori della matrice $H(P)$, che sono le soluzioni λ dell' equazione $0 = \det(H(P) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$
$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda)$. Quindi gli autovalori di $H(P)$ sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$, sono tutti e due positivi, e pertanto, per il test dell' Hessiano con gli autovalori, si ritrova che P è un punto di minimo.